TD n°3: Formule de Stokes et théorie de Cauchy

Analyse complexe 2024-2025, Thomas Serafini
tserafini@dma.ens.fr

N'hésitez pas à m'écrire si vous trouvez une erreur dans la correction ou si vous voulez une clarification !

La formule de Stokes

Note informelle sur l'intégration et les formes différentielles

Soit C une courbe lisse, disons avec deux extrémités (l'image d'un segment), dans $\mathbb{R}^2$. Comment intégrer une fonction continue $f : C \to \mathbb{R}$ sur C ? L'approche de Riemann nous suggère de choisir une orientation pour la courbe (d'une extrémité vers l'autre), de prendre n points sur la courbe en respectant cette orientation et de considérer la quantité

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(p_k)|\delta p_k|$$

où $\delta p_k = p_{k+1} - p_k$, l'idée étant que $|\delta p_k|$ est approximativement la longueur de la courbe entre p_k et p_{k+1} si les p_i sont suffisamment rapprochés. On peut réécrire $|\delta p_k| = \frac{\delta p_k}{|\delta p_k|} \cdot \delta p_k$: ce changement peut paraître mineur, mais il transofrme $f(p_k)|\delta p_k|$ en

$$f(p_k)\frac{\delta p_k}{|\delta p_k|} \cdot \delta p_k.$$

Quand $\delta p_k \to 0$, δp_k devient essentiellement un vecteur tangent (très petit) à C en p_k et $f(p_k)\delta p_k/|\delta p_k|$ devient la forme linéaire sur l'espace tangent à C en p_k qui donne la valeur $f(p_k)$ au vecteur tangent unitaire.

La forme linéaire $f(p_k)\delta p_k/|\delta p_k|$ est la forme linéaire sur la droite tangente à C qui donne la valeur $f(p)$ au vecteur tangent unitaire à C en p, orienté positivement. Rien ne nous force cependant à privilégier cette forme linéaire à une autre : on peut par exemple choisir la projection sur la première coordonnée, ce qui correspond aux sommes de Riemann

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(p_k)(x_{k+1} - x_k) \sim \int_C f(x,y)dx.$$

De manière générale, le bon objet à intégrer sur une courbe est une application continue ω qui à $p \in C$ associe une forme linéaire ω_p sur la droite tangente à C en p. On appelle "forme différentielle" une telle ω. Notez que comme on peut multiplier une forme linéaire par un nombre réel, on peut toujours multiplier une forme différentielle par une fonction continue f, par la formule

$$(f \cdot \omega)_p(v) := f(p)\omega_p(v).$$

On peut se donner une idée de comment intégrer la forme différentielle ω sur C en considérant des sommes de Riemann de la forme

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_{p_k}(\delta p_k).$$

Le cas de $\int_C dx$ correspond à la restriction de la forme différentielle "constante" $p \mapsto ((u,v) \mapsto u)$ à C, c'est-à-dire

$$dx|_C := p \in C \mapsto ((u,v) \in T_pC \mapsto u)$$

où T_pC est la droite (vectorielle) tangente à C dans $\mathbb{R}^2$. Pour être plus rigoureux, si ω est une forme différentielle sur C, et $\gamma : [0,1] \to C$ est une paramétrisation, alors on peut définir

$$\int_C \omega = \int_0^1 \omega_{\gamma(t)}(\gamma'(t))dt.$$

On peut prouver avec des outils basiques de géométrie différentielle que cette définition donne un nombre indépendant de la paramétrisation. Pour rester cohérent avec la notation de l'intégrale, on note généralement

dx_i la forme différentielle correspondant à la projection sur la i-ème coordonnée (vous noterez que c'est également la différentielle de l'application $(x_1, ..., x_d) \mapsto x_i$). Vous pouvez vérifier que

$$\int_0^1 f(t)dt$$

correspond précisément à l'intégrale de la *forme différentielle* qui à un vecteur tangent v à $[0,1]$ en t (c'est-à-dire un nombre réel) associe la valeur $f(t)v$, c'est à dire l'intégrale de la forme différentielle $f(t)dt$.
Pour plus de détails, d'explications ou de clarifications, vous pouvez soit attendre le chapitre correspondant du cours de géométrie différentielle, soit me demander directement par mail ! N'hésitez pas, je répondrai avec plaisir.

Exercice 1. Formule de Stokes holomorphe-antiholomorphe.
On développe

$$fdz + gd\overline{z} = fdx + ifdy + gdx - igdy.$$

On applique la formule de Stokes à $f+g$ et $i(f-g)$, ce qui donne

$$\int_{\partial K} fdz + gd\overline{z} = \int_K i\frac{\partial(f-g)}{\partial x} - \frac{\partial(f+g)}{\partial y}dxdy.$$

On vérifie finalement que

$$i\frac{\partial(f-g)}{\partial x} - \frac{\partial(f+g)}{\partial y} = 2i\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g}{\partial x} - i\frac{\partial g}{\partial y}\right)\right)$$

ce qui conclut.

Exercice 2. Aires de polygones réguliers.
On désire calculer l'aire du n-gone régulier, c'est-à-dire l'enveloppe convexe dans $\mathbb{C}$ des racines n-èmes de l'unité. On note P_n le polygone, A_n son aire et on fixe $\zeta_n := e^{\frac{2\pi i}{n}}$

1. Le chemin γ_j correspond au segment de ζ_n^j à ζ_n^{j+1}.
2. On pose $f(z) = \overline{z}$, $g(z) = 0$. La formule de Stokes donne :

$$2i\int_{P_n} dxdy = \int_{\partial P_n} \overline{z}dz$$

   et comme $\int_{P_n} dxdy = A_n$, on conclut.
3. Le long de γ_j, on a $\overline{z} = \overline{\zeta}_n^j\big(1 + t(\overline{\zeta}_n - 1)\big)$ et $dz = \zeta_n^j(\zeta_n - 1)$, donc $zd\overline{z} = (\zeta_n - 1)\big(1 + t(\overline{\zeta}_n - 1)\big)dt$. En intégrant, on trouve

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_j} \overline{z}dz &= \int_0^1 (\zeta_n - 1)\big(1 + t(\overline{\zeta}_n - 1)\big)dt \\ &= \frac{1}{2}(\zeta_n - 1)(\overline{\zeta}_n + 1) \\ &= \frac{1 + \zeta_n - \overline{\zeta}_n - 1}{2} \\ &= i\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right).\end{aligned}$$

   On conclut que $A_n = \frac{n}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$.

Exercice 3. Le théorème de la divergence

1. La normale sortante unitaire est donnée par

$$\boldsymbol{\nu} = \frac{1}{|\dot{\gamma}(t)|}\begin{bmatrix} \dot{y}(t) \\ -\dot{x}(t) \end{bmatrix}.$$

   Le vecteur tangent unitaire est $\frac{1}{|\dot{\gamma}|}\dot{\gamma}$. Les éléments dx et dy sont respectivement donnés par $\dot{x}(t)dt$ et $\dot{y}(t)dt$.

2. Le calcul donne

$$
\begin{aligned}
ds &= \frac{1}{|\dot\gamma(t)|}\left(\dot x(t)dx + \dot y(t)dy\right) \\
&= \frac{1}{|\dot\gamma(t)|}\left(\dot x(t)^2dt + \dot y(t)^2dt\right) \\
&= |\dot\gamma(t)|dt.
\end{aligned}
$$

On remarque ensuite que

$$\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{\nu} = \frac{1}{|\dot\gamma|}(f\dot y - g\dot x)$$

et donc

$$\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{\nu}ds = (f\dot y - g\dot x)dt = fdy - gdx$$

3. Le calcul découle directement de la formule de Stokes (en changeant un signe).

Exercice 4. La solution fondamentale du laplacien en dimension deux.

1. La convergence à l'infini est claire car l'intégrale a lieu sur le support de φ, qui est un compact. La convergence en zéro peut se prouver par exemple en intégrant en coordonnées polaires :

$$\int_{\mathbb{D}(0,R)} \Delta\varphi(z)\log|z|dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^R \Delta\varphi(re^{i\theta})\log(r)rdrd\theta.$$

La fonction $r\mapsto r\log(r)$ s'étend continument à $[0,r]$, et l'intégrale converge donc sans problème.

2. Pour $\varepsilon>0$ assez petit, φ est identiquement nulle sur $\{|z|>\varepsilon^{-1}\}$. Le théorème de convergence dominée (en dominant par exemple par $\sup|\varphi|\log|z|$) permet de conclure.

3. On veut appliquer la formule de Stokes, on calcule donc :

$$\overline{\partial}(f(z)\partial g(z)) = \overline{\partial}f(z)\partial g(z) + f(z)\partial\overline{\partial}g(z) = \overline{\partial}f(z)\partial g(z) + \frac{1}{4}f(z)\Delta g(z).$$

Un calcul similaire donne

$$\partial(\overline{\partial}f(z)g(z)) = \overline{\partial}f(z)\partial g(z) + \frac{1}{4}\Delta f(z)g(z)$$

et le résultat découle donc du fait que

$$f(z)\Delta g(z) - \Delta f(z)g(z) = 4\overline{\partial}(f(z)\partial g(z)) - 4\partial(\overline{\partial}f(z)g(z)).$$

4. Pour $\varepsilon>0$ assez petit, φ est identiquement nulle sur $|z|>\varepsilon^{-1}$, et a fortiori $\Delta\varphi$ aussi : il ne reste donc que l'intégrale sur le bord intérieur de U_ε, qui est T_ε orienté dans le sens **horaire**. On applique alors la formule ci-dessus à $f=\varphi$ et $g=\log|z|$, ce qui donne le résultat voulu (attention au signe dû au sens dans lequel on intègre) car $\log|z|$ est harmonique.

5. Un calcul brute-force marche bien ici. On peut aussi être malin.e : sur $\mathbb{C}\backslash]-\infty,0]$, on considère la fonction log, donnée par $\log(re^{i\theta}) = \log(r)+i\theta$ pour $r>0$, $\theta\in]-\pi,\pi[$. C'est une fonction holomorphe (on peut le vérifier avec Cauchy-Riemann polaire par exemple, ou utiliser la définition du log par série entière), et on calcule

$$\log(z)+\log(\overline{z}) = \log(r)+i\theta+\log(r)-i\theta = 2\log|z|.$$

Comme $z\mapsto\log(\overline{z})$ est antiholomorphe, on trouve $\partial\log|z| = \frac{1}{2z}$ sur $\mathbb{C}\backslash]-\infty,0]$ et donc sur tout $\mathbb{C}^*$ par continuité.

6. La première intégrale converge clairement vers $2\pi\varphi(0)$ (simplement par continuité de φ), et la deuxième tend vers 0 à cause du facteur $\varepsilon\log(\varepsilon)$. On a donc le résultat voulu.

Calculs d'intégrales par le théorème de Cauchy

Exercice 5. Une première intégrale

Soient $a, b > 0$. On considère la courbe γ donnée par l'équation $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$.

1. L'équation définit une ellipse ne passant pas par zéro. En appliquant la formule de Stokes à l'ouvert délimité à l'extérieur par l'ellipse et à l'intérieur par un petit cercle de rayon $\varepsilon > 0$, on trouve
$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = \int_{\partial\mathbb{D}(0,\varepsilon)} \frac{dz}{z} = 2i\pi$$

2. On peut paramétriser γ par $\gamma(t) = a\cos(t) + ib\sin(t)$. On obtient alors $\gamma'(t) = -a\sin(t) + ib\cos(t)$ et $\overline{\gamma}(t) = a\cos(t) - ib\sin(t)$. Un calcul direct donne :
$$(-a\sin(t) + ib\cos(t))(a\cos(t) - ib\sin(t)) = (b^2 - a^2)\sin(t)\cos(t) + iab(\sin^2(t) + \cos^2(t)).$$
Ainsi, on trouve
$$2i\pi = \int_0^{2\pi} \frac{(b^2 - a^2)\sin(t)\cos(t)}{a^2\cos^2(t) + b^2\sin^2(t)} dt + iab\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2\cos^2(t) + b^2\sin^2(t)}.$$
On en conclut, en prenant les parties imaginaires, que l'intégrale voulue vaut $\frac{2\pi}{ab}$.

Exercice 6. Intégrales gaussiennes

1. On intègre sur le rectangle dont les coins sont $-R, R, R - i\xi, -R - i\xi$. On estime les intégrales sur les bords verticaux du rectangle :
$$\int_0^\xi e^{-(\pm R - it)^2} dt = e^{-R^2} \int_0^\xi e^{\pm Rit + t^2} dt$$
converge clairement vers zéro quand $R \to \infty$, et donc en appliquant la formule de Cauchy à la fonction analytique e^{-z^2} sur le rectangle, on obtient
$$\int_{-R}^R e^{-x^2} dx - \int_{-R}^R e^{-(x-i\xi)} dx + o(1) = 0$$
ce qui conclut pour la première égalité.
Pour la deuxième égalité, il suffit de compléter le carré :
$$\int_\mathbb{R} e^{-x^2} e^{-i\xi x} dx = e^{-\xi^2/4} \int_\mathbb{R} e^{-(x - i\xi/2)^2} dx = e^{-\xi^2/4} \int_\mathbb{R} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} e^{-\xi^2/4}.$$

2. On intègre la fonction sur le secteur angulaire d'angle $\pi/4$, composé de $\gamma_R^1(t) = t$ sur $[0, R]$, $\gamma_R^2(t) = Re^{it}$ sur $[0, \pi/4]$ et $\gamma_R^3(t) = e^{i\pi/4}(R - t)$ sur $[0, R]$. On peut estimer l'intégrale sur γ_R^2 comme suit :
$$\begin{aligned}
\left| \int_0^{\pi/4} e^{-R^2 e^{2it}} iRe^{it} dt \right| &\leq R \int_0^{\pi/4} \left| e^{-R^2 e^{2it}} \right| dt \\
&\leq R \int_0^{\pi/4} e^{-R^2 \cos(2t)} dt \\
&\leq R \int_0^{\pi/4} e^{-R^2(1 - 4t/\pi)} dt \\
&\leq Re^{-R^2} \frac{1}{R^2} e^{4t/\pi} \Big|_0^{\pi/4} \\
&\leq \frac{1}{R} \left(1 - e^{-R^2}\right).
\end{aligned}$$
La majoration $\cos(t) \geq 1 - 2t/\pi$ découle de la convexité de la fonctions cos sur $[0, \pi/2]$. On trouve donc, par Cauchy :
$$\int_0^R e^{-t^2} dt - e^{i\pi/4} \int_0^R e^{-it^2} dt = O\left(\frac{1}{R}\right)$$
et on a donc
$$\int_0^\infty e^{-it^2} dt = (1 - i)\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Exercice 7. Encore une intégrale
La fonction $z \mapsto \frac{\log(z)}{1-z}$ semble avoir un pôle en 1, mais on sait que $\log(z) = z - 1 + ...$ au voisinage de 1, donc $\frac{\log(z)}{1-z}$ définit une fonction analytique sur l'intérieur de l'ouvert considéré.
En prenant $\varepsilon \to 0$, l'intégrale s'évalue à

$$\int_0^{2\pi} \frac{\log(1+e^{it})}{-e^{it}} ie^{it} dt = 0$$

et donc

$$\int_0^{2\pi} \log(1+e^{it}) dt = 0.$$

On passe à la partie réelle, et on a

$$\int_0^{2\pi} \log|1+e^{it}| dt = 0$$

On vérifie que $|1+e^{it}| = |e^{-it/2} + e^{it/2}| = 2|\cos(t/2)|$, et donc

$$0 = \int_0^{2\pi} \log(2) + \log|\cos(t/2)| dt.$$

Après réarrangements et changement de variable, on obtient

$$\int_0^{\pi} \log|\cos(t)| dt = -\pi \log(2)$$

et on obtient le résultat voulu en remarquant que

$$\int_0^{\pi/2} \log(\cos(t)) dt = \int_{\pi/2}^{\pi} \log(-\cos(t)) dt.$$

Exercice 8. Chemins alternatifs pour la fonction Γ.
On note, pour $s \in \mathbb{C}$ vérifiant $\Re(s) > 0$:

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-x} dx.$$

1. L'intégrale converge en zéro car $|x^{s-1}| = x^{\Re(s)-1}$, qui est intégrable en zéro si $\Re(s) > 0$, et elle converge à l'infini car elle est de type polynôme fois exponentielle.

2. On considère le contour donné par $\gamma_R^1(t) = t$ sur $[0, R]$, $\gamma_R^2(t) = e^{it}$ sur $[0, \theta]$ (ou e^{-it} sur $[0, -\theta]$ si $\theta < 0$), et $\gamma_R^3(t) = z(R-t)$ sur $[0, R]$. On majore l'intégrale sur γ_R^2 :

$$\left| \int_0^{\theta} R^{s-1} e^{i(s-1)t} e^{-Re^{it}} dt \right| \leq \theta R^{\Re(s)-1} e^{-R\cos(\theta)}$$

   et on conclut par la méthode habituelle.

3. Le fait que $|\Im(\gamma(t))| \leq a\Re(\gamma(t)) + b$ implique que l'argument de $\gamma(t)$ est asymptotiquement inférieur, en valeur absolue, à $\arctan(a) + \varepsilon$ (c'est-à-dire que pour $\varepsilon > 0$ fixé, il existe R_ε tel que pour tout $t \geq R_\varepsilon$ on a $|\arg(\gamma(t))| \leq \arctan(a) + \varepsilon$). Choisissons un θ vérifiant $\pi/2 > \theta > \arctan(a)$.
   Soit $R > 0$: on considère le contour donné par le segment $[0, |\gamma(R)|]$, l'arc de cercle qui joint $|\gamma(R)|$ à $\gamma(R)$, et γ restreint à $[0, R]$, parcouru en sens inverse. Le théorème de Cauchy dit que la somme des intégrales sur ces trois morceaux est nulle, il suffit d'estimer l'intégrale sur l'arc de cercle de rayon $|\gamma(R)|$ pour conclure. Posons $\gamma(R) = Ae^{i\phi}$.

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{\phi} A^{s-1} e^{i(s-1)t} e^{-Ae^{it}} dt \right| &\leq \int_{-|\phi|}^{|\phi|} A^{\Re(s)-1} e^{-A\cos(t)} dt \\ &\leq A^{\Re(s)-1} \int_{-\theta}^{\theta} e^{-A\cos(t)} dt \\ &\leq 2A^{\Re(s)-1} e^{-A\cos(\theta)} \end{aligned}$$

   Comme $A \to \infty$ quand $R \to \infty$, cette portion est bien négligeable, ce qui donne le résultat.

Exercice 9. L'intégrale de Dirichlet

On définit un contour $\gamma_{\varepsilon,R}$ comme suit : $\gamma_\varepsilon^1(t) = e^{i(\pi-t)}$ sur $[0,\pi]$, $\gamma_{\varepsilon,R}^{2,\pm}(t) = \pm t$ sur $[\varepsilon, R]$ et $\gamma_R^3(t) = e^{it}$ sur $[0,\pi]$.

1. C'est la continuité de $z \mapsto e^z$ en 0.

2. Comme $\sin(\pi - t) = \sin(t)$, les intégrales sur $[0,\pi/2]$ et sur $[\pi/2,\pi]$ sont égales. On ne s'occupe que de la première :
$$\int_0^{\pi/2} e^{-R\sin(t)}dt \leq \int_0^{\pi/2} e^{-2tR\pi}dt = \frac{1}{R}\left(1 - e^{-R}\right).$$
C'est clairement un $O(1/R)$.

3. La fonction $z \mapsto \frac{e^{iz}}{z}$ est analytique sur l'intérieur de l'ouvert défini par le contour, et on peut donc appliquer la formule de Cauchy. Il suffit de vérifier que l'intégrale sur γ_R^3 est un $O(1/R)$.
$$\begin{aligned}\left|\int_0^\pi \frac{e^{iRe^{it}}}{Re^{it}} iRe^{it}dt\right| &\leq \int_0^\pi e^{\Re(iRe^{it})}dt \\ &\leq \int_0^\pi e^{-R\sin(t)}dt = O\left(\frac{1}{R}\right)\end{aligned}$$

4. $$\begin{aligned}\int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{ix}}{x}dx + \int_\varepsilon^R \frac{e^{ix}}{x}dx &= \int_\varepsilon^R \left(\frac{e^{ix}}{x} - \frac{e^{-ix}}{-x}\right)dx \\ &= \int_\varepsilon^R \frac{2i\sin(x)}{x}dx\end{aligned}$$

5. La valeur de l'intégrale multipliée par $2i$ est, par la question 3, la limite quand $\varepsilon \to 0$ de
$$-\int_{\gamma_\varepsilon^1} \frac{e^{iz}}{z} = -\int_0^\pi \frac{e^{-i\varepsilon e^{i(\pi-t)}}}{\varepsilon e^{i(\pi-t)}} \cdot -i\varepsilon e^{i(\pi-t)}dt = i\int_0^\pi e^{i\varepsilon e^{-it}}dt.$$
Par la question 1, cette valeur est $i\pi$, et donc
$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}dx = \frac{\pi}{2}.$$